数理解析研究所講究録
1523 巻 2006 年 53-62

ON THE RELATION BETWEEN THE FORMAL DEGREE AND THE ADJOINT LOCAL FACTOR OF A DISCRETE SERIES REPRESENTATION OF A REDUCTIVE GROUP OVER A LOCAL FIELD

KAORU HIRAGA, ATSUSHI ICHINO, AND TAMOTSU IKEDA

1. Introduction

$\mathbf{G}$ を局所体 F 上定義された連結な reductive group とし, $\mathbf{H}$ を F 上の $\mathbf{G}$ の部分群とする. いま, $G=\mathbf{G}(F)$ の既約ユニタリ表現 (π, V_π) と $v, v' \in V_\pi$ に対して積分

$$\int_H (\pi(h)v, v')\,dh \tag{1.1}$$

を考える. これは, 保型形式の周期積分の類似と見なす事ができ, π の L-factor や ϵ-factor と関係することが期待できる. 例えば, 本研究集会での池田–市野の講演のように, $\mathbf{G}=SO(n+1)\times SO(n)$, $\mathbf{H}=SO(n)$ で $\pi=\pi_1 \boxtimes \pi_0$ が G の不分岐な tempered 表現の場合は, 上記の積分 (1.1) は,

$$\frac{L(\frac{1}{2}, \pi_1\times\pi_0)}{L(1,\pi_1,\mathrm{Ad})L(1,\pi_0,\mathrm{Ad})}$$

を使って表す事が出来る ([II] 参照).

ここで, $\mathbf{G}=\mathbf{H}\times\mathbf{H}$ に $\mathbf{H}$ を対角に埋め込んだ場合を考える. いま, π_H を H の square integrable 表現とし, $\check{\pi}_H$ をその反傾表現とする. このとき, $\pi=\pi_H\boxtimes\check{\pi}_H$ とすると, 積分 (1.1) は π_H の formal degree を定義していたものである. この場合も積分 (1.1) が L-factor や ϵ-factor と関係するならば, formal degree を L-factor や ϵ-factor によって表すことができると期待される. 実際に, 以下で述べるように, formal degree は adjoint γ-factor

$$\gamma(s,\pi_H,\mathrm{Ad},\psi)=\epsilon(s,\pi_H,\mathrm{Ad},\psi)\cdot\frac{L(1-s,\check{\pi}_H,\mathrm{Ad})}{L(s,\pi_H,\mathrm{Ad})}$$

により書くことができると予想される (ここで, ψ は F の加法群に関する自明でない指標で, Ad は ${}^LH$ の Lie 環 $\mathrm{Lie}(\hat{H})$ への adjoint 表

現である (^LH は $\mathbf{H}$ の L-群で $\hat{H}$ は $\mathbf{H}$ の dual group)). この予想は, Langlands による Plancherel measure に関する予想を formal degree を含むように自然に拡張したものであるが, これまで formal degree に関するこのような予想は知られていなかったと思われる. $F=\mathbb{R}$ で H がコンパクトな群の場合は, Weyl の次元公式により formal degree は与えられるが, よく知られている Weyl の次元公式が, 実は γ-factor により書かれるということは著者にとって驚きであった.

本稿では, §2 で formal degree に関する予想 (Conjecture 2.1) を述べる. ここでは Langlands conjecture を仮定する. §3 では, Conjecture 2.1 の成り立っている例を挙げる. (但し, いくつかの場合には Langlands 対応は, その候補である). §4 では $U(3)$ の stable な square integrable 表現に対する Conjecture 2.1 の証明の概略を述べる. (詳細は [HII] を参照). この証明では, twisted endoscopy と intertwining operator を使う. Twisted endoscopy を使うので $U(3)$ の場合に限っているが, 同様の議論は他の群に対しても可能である.

2. Formal degree に関する予想

F を標数 0 の局所体とし ψ を F の加法群に関する自明でない指標とする. F が p-進体のときは, F の整数環を $\mathfrak{o}_F$ と書き, $\mathfrak{o}_F$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}_F$ と書く. また, $q_F=|\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F|$ とおく. F の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を Γ で表し, F の Weil 群を W_F で表す. また, F の Langlands 群 L_F を

$$L_F=\begin{cases} W_F, & F=\mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}, \\ W_F\times SU_2, & F=p\text{-進体}, \end{cases}$$

で与える. 以後, $\mathbf{G}$ を F 上の連結な reductive group とし, $\eta:\mathbf{G}\longrightarrow\mathbf{G}^*$ を $\mathbf{G}$ の quasi-split inner form $\mathbf{G}^*$ への inner twist とする. また, $\mathbf{G}$ の dual 群を $\hat{G}$ とし, $^LG=\hat{G}\rtimes W_F$ を L-群とする.

いま, (π,V_π) を $G=\mathbf{G}(F)$ の square integrable 表現とし, $(\cdot,\cdot)$ を V_π 上の G-不変なエルミート形式とする. このとき, π の formal degree $d(\pi)$ は次の式で定義される.

$$\int_{G/A}(\pi(g)u,u')\overline{(\pi(g)v,v')}\,dg=d(\pi)^{-1}(u,v)\overline{(u',v')},\quad u,u',v,v'\in V_\pi.$$

ただし, $\mathbf{A}$ は $\mathbf{G}$ の中心の最大の連結な split torus で $A=\mathbf{A}(F)$ である. Formal degree $d(\pi)$ は Haar measure dg の取り方によっているので, Haar measure を明示する場合には $d(\pi,dg)$ と書くことにする. Formal degree が Haar measure によっている一方で, γ-factor は F の加法群の指標 ψ によっているので, Haar measure を ψ から決めることができれば望ましいが, これは以下のようにして行うことができる. いま, square integrable 表現が存在しなければならないので, $\mathbf{G}/\mathbf{A}$ が

anisotropic な maximal torus をもっている場合を考えればよい．このとき，Gross [Gr97a, §4, §7] に従い，$\mathbf{G}/\mathbf{A}$ 上に次数が $\dim \mathbf{G}/\mathbf{A}$ で F 上定義された微分形式 $\omega_{\mathbf{G}/\mathbf{A}}$ を定めることができる．微分形式 $\omega_{\mathbf{G}/\mathbf{A}}$ は G/A 上の Haar measure を定義するが，その定義で使われる F 上の通常の Haar measure にかえて，ψ に関する F 上の self-dual な Haar measure を使うことで，G/A 上の Haar measure $\mu_{\mathbf{G}/\mathbf{A},\psi}$ を定義することができる．簡単に分かるように，ψ を $\psi_a(x) = \psi(ax)$ でとりかえると，

$$\mu_{\mathbf{G}/\mathbf{A},\psi_a} = |a|_F^{\frac{\dim \mathbf{G}/\mathbf{A}}{2}} \cdot \mu_{\mathbf{G}/\mathbf{A},\psi}$$

となる．よって，

$$d(\pi, \mu_{\mathbf{G}/\mathbf{A},\psi_a}) = |a|_F^{-\frac{\dim \mathbf{G}/\mathbf{A}}{2}} \cdot d(\pi, \mu_{\mathbf{G}/\mathbf{A},\psi}) \tag{2.1}$$

である．

ここで，tempered の場合の local Langlands conjecture について簡単に復習する．$\Pi(G)$ を G の既約許容表現の同値類全体のなす集合とする．Langlands は Langlands parameter $\phi\colon L_F \longrightarrow {}^LG$ に対して，$\Pi(G)$ の有限部分集合 $\Pi_\phi(G)$ が対応すると予想した．この対応は，L-factor と ϵ-factor を保つと予想されているが，それ以外にも，ϕ が tempered (i.e. $\phi(W_F)$ が bounded) ならば $\Pi_\phi(G)$ に含まれる表現は全て tempered 表現であり，ϕ が tempered かつ elliptic ならば $\Pi_\phi(G)$ に含まれる表現は全て square integrable 表現であることが予想されている．以下では，ϕ が tempered とする．いま，

$$S_\phi = \{s \in \hat{G}_{sc} |\ \mathrm{Int}(s) \circ \phi = a_s \cdot \phi\},$$
$$\mathcal{S}_\phi = S_\phi / S_\phi^0,$$

とおく．但し，a_s は W_F の $Z(\hat{G})$ に値をもつ trivial 1-cocycle であり，$\hat{G}_{sc}$ は $\hat{G}$ の derived group の simply connected covering group である．また，$\mathcal{Z}_\phi$ を $Z(\hat{G}_{sc})$ の $\mathcal{S}_\phi$ での像とし，$\mathcal{Z}_{\phi,\Gamma}$ を $Z(\hat{G}_{sc})^\Gamma$ の $\mathcal{S}_\phi$ での像とする．(但し，$(\ )^\Gamma$ は Γ-不変な元全体のなす部分群を意味する)．$\mathbf{G}$ は $\mathbf{G}^*$ の inner form なので，$H^1(F, \mathbf{G}^*_{ad})$ の class を定める．よって，Kottwitz 写像

$$H^1(F, \mathbf{G}^*_{ad}) \longrightarrow \pi_0(Z(\hat{G}_{sc})^\Gamma)^D$$

(但し，$(\ )^D$ は Pontrjagin dual を意味する) を通して $\mathcal{Z}_{\phi,\Gamma}$ の 1 次元指標 $\chi_\mathbf{G}$ を定めることができる．いま，$\chi_\mathbf{G}$ の $\mathcal{Z}_\phi$ の 1 次元指標への延長をひとつとり，それも同じ $\chi_\mathbf{G}$ で表すことにする．さて，$\Pi(\mathcal{S}_\phi, \chi_\mathbf{G})$ によって $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現のなかで central character の $\mathcal{Z}_\phi$ への制限が χ_G となるもの全体のなす集合を表すことにすると，写像

$$\Pi_\phi(G) \longrightarrow \Pi(\mathcal{S}_\phi, \chi_\mathbf{G})$$

が存在すると予想されている．この対応は，一意的ではないが，π に対応する $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現 ρ_π の次元は一意的に定まると予想されている．この ρ_π の次元を $\langle 1, \pi\rangle$ と表すことにする．

Formal degree に関する予想を述べる為に，$\mathbf{G}/\mathbf{A}$ の dual group を $\hat{G}^\natural$ とおいて，$\hat{G}^\natural$ での S-群を

$$S_\phi^\natural = \{s \in \hat{G}^\natural | \operatorname{Int}(s) \circ \phi = \phi\},$$
$$\mathcal{S}_\phi^\natural = \pi_0(S_\phi^\natural),$$

と定める．また，Ad を ${}^LG$ の $\operatorname{Lie}(\hat{G})/\operatorname{Lie}(Z(\hat{G})^\Gamma)$ への adjoint 表現とし，

$$\gamma(s, \pi, \mathrm{Ad}, \psi) = \epsilon(s, \pi, \mathrm{Ad}, \psi) \cdot \frac{L(1-s, \check{\pi}, \mathrm{Ad})}{L(s, \pi, \mathrm{Ad})}$$

(但し，$\check{\pi}$ は π の反傾表現) とする．

この節の中心となる formal degree に関する予想は次のものである．

Conjecture 2.1 (市野). ϕ を *tempered* で *elliptic* な *Langlands parameter* とするとき，$\pi \in \Pi_\phi(G)$ に対して

$$d(\pi) = \frac{\langle 1, \pi\rangle}{|\mathcal{S}_\phi^\natural|} \cdot |\gamma(0, \pi, \mathrm{Ad}, \psi)|$$

が成り立つ．

Remark 2.2. ϕ が elliptic なので，$\mathrm{Ad} \circ \phi$ は trivial 表現を含まない．よって，γ-factor $\gamma(s, \mathrm{Ad} \circ \phi, \psi)$ は $s = 0$ で零点も極ももたない．

Conjecture 2.1 は Plancherel measure に関する Langlands の予想を formal degree に自然に拡張したものになっている．以下で Conjecture 2.1 を使って Plancherel measure を書いてみる．$\mathbf{G}$ の極大な split torus $\mathbf{A}_0$ をとる．$\mathbf{P}$ を $\mathbf{A}_0$ を含む parabolic 部分群とするとき，$\mathbf{P}$ は，$\mathbf{A}_0$ を含む Levi 部分群 $\mathbf{M}$ と unipotent radical $\mathbf{N}$ の積に分解される．このとき，M の square integrable 表現の同値類全体のなす集合 $E_2(M)$ に，M の不分岐な 1 次元指標全体のなす群 $\operatorname{Im} X(M)$ が作用する．ここで，$\Theta = \{(\mathfrak{O}, \mathbf{P} = \mathbf{MN})\}$ を $\mathbf{A}_0$ を含む $\mathbf{P}$ と $E_2(M)$ のなかの $\operatorname{Im} X(M)$-orbit $\mathfrak{O}$ の組全体のなす集合とする．さて，$(\mathfrak{O}, \mathbf{P}) \in \Theta$, $\pi \in \mathfrak{O}$ とする．$\phi_M : L_F \longrightarrow {}^LM$ を π に対応する (conjectural) Langlands parameter とし，r_M を ${}^LM$ の $\operatorname{Lie}(\hat{G})/\operatorname{Lie}(Z(\hat{M})^\Gamma)$ への adjoint 表現とする．また，

$$d\nu(\pi) = \frac{\langle 1, \pi\rangle}{|\mathcal{S}_{\phi_M}^\natural|} \cdot |\gamma(0, \pi, r_M, \psi)| \cdot d\pi$$

とおく．但し，$d\pi$ は $\mathfrak{O}$ の上の Lebesgue measure とする (正確な定義は [Wa03, pp.239 and 302] を参照)．このとき，Conjecture 2.1 を考慮すると，Plancherel formula は次の形になる．

Conjecture 2.3.

$$f(1) = \sum_{(\mathfrak{O},\mathrm{P}=\mathrm{MN})\in\Theta} c_M \int_{\mathfrak{O}} \operatorname{trace} \operatorname{Ind}_P^G(\pi)(f)\, d\nu(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G).$$

但し, 定数 $c_M \in \mathbb{R}_{>0}$ は $\mathfrak{O}$ によらず $\mathbf{M}$ のみによっている. ([Wa03] を参照).

3. Examples

Conjecture 2.1 は以下の場合には確かめられている (詳細は, [HII, §§2,3] 参照). いずれの場合も, 元になる結果は Conjecture 2.1 とは異なる形で書かれているので, γ-factor を使った形に書き直す必用がある.

$F = \mathbb{R}$ で G は compact

Conjecture 2.1 は Weyl の次元公式と G の体積の公式から導かれる.

以下の結果は全て F が p-進体の場合.

$\mathbf{G}$ が GL_n の inner form

この場合は Silberger–Zink [SZ96, Zi93] の結果から導かれる.

$\mathbf{G}$ が SL_n の inner form

この場合は, GL_n の inner form に関する上の結果と, 斎藤–平賀 [HS] から導かれる.

π が Steinberg 表現

Borel [Bo76] による π の formal degree の計算と Kottwitz [Ko88] と Gross [Gr97a, Gr97b] の結果から導かれる.

$\mathbf{G}$ が adjoint で split な例外型の群で, ϕ が不分岐

Reeder [Re00] の結果から従う.

$\mathbf{G}$ が不分岐な群 $\mathbf{G}^*$ の pure inner form で ϕ が tame

DeBacker–Reeder [DR] の結果と Gross [Gr97a] から従う.

4. $U(3)$ の場合

ここでは, 次の定理の証明の概略を説明する (詳細は, 池田–市野–平賀 [HII] を参照).

Theorem 4.1. F を p-進体とし $\mathbf{H} = U(3)$ を F 上定義された 3 次のユニタリ群とする. もし, π_H が H の *stable* な *square integrable* 表現であれば,

$$d(\pi_H) = \frac{1}{2} \cdot |\gamma(0, \pi_H, \mathrm{Ad}, \psi)|$$

である．つまり，*Conjecture 2.1* が成り立つ．

証明には，twisted endoscopy を用いる．E を F 上の２次の拡大体で，$U(3)$ が E 上 split するものとする．$\mathbf{G} = \mathrm{Res}_{E/F}GL(3)$ とすると，$\mathrm{Gal}(E/F)$ の non-trivial な元 σ が $\mathbf{G}$ に F 上の同形写像を引き起こす．この同形写像も σ と書くことにする．類体論により 2 次拡大 E/F に対応する $F^\times$ の指標を $\omega_{E/F}$ と表す．ここで，

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおいて，$\mathbf{G}$ の F 上定義された同形写像 θ を

$$\theta(g) = \mathrm{Ad}(J)(\sigma({}^tg^{-1})), \quad g \in \mathbf{G},$$

により定める．いま，$\hat{G} = GL(3,\mathbb{C}) \times GL(3,\mathbb{C})$ に W_F の作用を

$$(g_1, g_2) \mapsto \begin{cases} (g_1, g_2), & \text{if } w \in W_E, \\ (g_2, g_1), & \text{if } w \notin W_E, \end{cases}$$

で定めると，${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ である．また，$\hat{H} = GL(3,\mathbb{C})$ に W_F の作用を

$$h \mapsto \begin{cases} h, & \text{if } w \in W_E, \\ \mathrm{Ad}(J)({}^th^{-1}), & \text{if } w \notin W_E, \end{cases}$$

により定めると ${}^LH = \hat{H} \rtimes W_F$ である．ここで，$\xi : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ を

$$\xi(h \rtimes w) = (h, \mathrm{Ad}(J)({}^th^{-1})) \rtimes w$$

で定めると，$(\mathbf{H}, {}^LH, 1, \xi)$ は $(\mathbf{G}, \theta)$ の endoscopic data となっている．また，r を ${}^LG$ の $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ への Asai 表現とし，$r' = r \otimes \omega_{E/F}$ とすると，$r' \circ \xi$ は ${}^LH$ の $\mathrm{Lie}(\hat{H})$ への adjoint 表現 Ad と同値になる．

さて，$\phi_H : L_F \longrightarrow {}^LH$ を ϕ_H に対応する Langlands parameter とし，π を $\phi = \xi \circ \phi_H : L_F \longrightarrow {}^LG$ に対応する G の既約表現とする．このとき，π_H が stable なので，π は square integrable 表現となる．また，π は θ-不変なので，intertwining operator $\pi(\theta) : V_\pi \longrightarrow V_\pi$ を

$$\pi(\theta)\pi(g) = \pi(\theta(g))\pi(\theta), \quad g \in G,$$
$$\pi(\theta)^2 = \mathrm{id},$$

をみたすようにとることができる．いま，$v, v' \in V_\pi$ とし，π の matrix coefficient f を

$$f(g) = (\pi(g)v, v'), \quad g \in G,$$

により定める．すると，Schur orthogonality relation によって，strongly θ-regular θ-semisimple で θ-elliptic な元 γ に対して，

$$J^\theta(\gamma, f) = d(\pi)^{-1}(v, \pi(\theta)v')J^\theta(\pi, \gamma) \tag{4.1}$$

が成り立つ. 但し, $J^{\theta}(\gamma, f)$ は twisted orbital integral で, $J^{\theta}(\pi, \gamma)$ は twisted character である.

さて, $J^{\theta}(\pi)$ は 1 の近傍で nilpotent orbital integral の Fourier 変換の一次結合に表すことができるので, nilpotent element 0 の項の係数を $c_{0,\theta}(\pi)$ と書くことにする. 同様に, π_H の character $J(\pi_H)$ の 1 の近傍での展開の nilpotent element 0 の項の係数を $c_0(\pi_H)$ と書くことにする. ここで, $J^{\theta}(\gamma, f)$ も 1 の近傍で Shalika germ expansion をもつので, 式 (4.1) から, homogeneity により

$$(v, \pi(\theta)v') \cdot c_{0,\theta}(\pi) = d(\pi) \cdot J^{\theta}(1, f) \tag{4.2}$$

がいえる.

Theorem 4.2.

$$|c_{0,\theta}(\pi)| = c \cdot |\gamma(0, \pi, r', \psi)| = c \cdot |\gamma(0, \pi_H, \mathrm{Ad}, \psi)|$$

但し, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ は π によらない定数.

Remark 4.3. Henniart [He03] の結果から, Langlands–Shahidi の γ-factor の絶対値 $|\gamma_{LS}(s, \pi, r', \psi)|$ と $|\gamma(s, r' \circ \phi, \psi)|$ は一致している.

Theorem 4.2 の証明の概略.

$$G^{\sharp} = U(6, F) = \{g \in GL(6, E) \mid gQ\sigma({}^t g) = Q\}$$

とする (但し, $Q = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$). また,

$$X = \{x \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(E) \mid \mathrm{Ad}(J)(\sigma({}^t x)) = x\}$$

とし, $G^{\sharp}$ の parabolic subgroup $P^{\sharp} = M^{\sharp}N^{\sharp}$ を

$$M^{\sharp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \theta(a) \end{pmatrix} \middle| \, a \in GL(n, E) \right\}$$

$$N^{\sharp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_3 & x \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix} \middle| \, x \in X \right\}$$

により定める. ここで, 誘導表現

$$I(s, \pi) = \mathrm{Ind}_{P^{\sharp}}^{G^{\sharp}}(\pi \otimes |\det|_E^{\frac{s}{2}}), \quad s \in \mathbb{C}$$

を考える. さて, $M(s, w, \pi) : I(s, \pi) \longrightarrow I(-s, w(\pi))$ を $w = \begin{pmatrix} 0 & 1_3 \\ -1_3 & 0 \end{pmatrix}$ に関する正規化していない intertwining operator とすると, $I(0, \pi)$ が既約であることと, 正規化した intertwining operator が unitary operator であることから (Shahidi [Sh90]),

(4.3)

$$|(\mathrm{Res}_{s=0} M(s, w, \pi)\Psi(1), v')| = |\mathrm{Res}_{s=0}\, \gamma(s, \pi, r, \psi)^{-1}(\Psi(1), \pi(\theta)v')|$$

が $\Psi \in I(s,\pi)$ に対していえる. 一方, $\overline{N^\sharp} = wN^\sharp w^{-1}$, $L = X \cap \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathfrak{o}_E)$ とし, $\Psi \in I(s,\pi)$ を, $P^\sharp\overline{N^\sharp}$ に $P^\sharp$ を法として compact な台をもち, しかも

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} 1_3 & 0 \\ x & 1_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} v, & \text{if } x \in L \\ 0, & \text{if } x \notin L \end{cases}$$

をみたすものとすると (Ψ はこの条件で一意的に決まる), Goldberg [Go94] の結果から,

$$(\mathrm{Res}_{s=0}\, M(s,w,\pi)\Psi(1), v') = c \cdot J^\theta(1,f) \tag{4.4}$$

が導かれる. 但し, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ は π によらない定数. よって, π に対しては Conjecture 2.1 が成り立っていることと, (4.2), (4.3), (4.4) から定理がいえる. □

さて, ここで, $\mathrm{Tran}_H^G\, J(\pi_H)$ を H の stable distribution $J(\pi_H)$ の G の distribution への transfer とすると,

$$J^\theta(\pi) = c \cdot \mathrm{Tran}_H^G\, J(\pi_H)$$

となる. (但し, $c \in \mathbb{C}^\times$ は 定数で $|c|$ は ϕ_H によらない). よって, homogeneity から

$$|c_{0,\theta}(\pi)| = |c| \cdot |c_0(\pi_H)| \tag{4.5}$$

がいえる. H の Steinberg 表現を $\pi_{H,0}$ と書くと, $|c_0(\pi_H)| = \dfrac{d(\pi_H)}{d(\pi_{H,0})}$ なので, $\pi_{H,0}$ に対しては Conjecture 2.1 が成り立っていることと, Theorem 4.2 と (4.5) から

$$d(\pi_H) = \frac{1}{2} \cdot |\gamma(0, \pi_H, \mathrm{Ad}, \psi)|$$

がいえる.

Remark 4.4. Endoscopic transfer が証明されていなければならないので, $\mathbf{H} = U(3)$ としているが, 同じ議論は, 他の群でも可能である.

Remark 4.5. 同様の議論により, $GL(n,F)$ の場合の証明もできる. これは, Silberger–Zink [SZ96, Zi93] の結果の別証明になっている. ([HII, §4] 参照)

References

[Ar86] J. Arthur, *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. **56** (1988), 223–293.

[Ar89] ———, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque **171-172** (1989), 13–71.

[AP05] A.-M. Aubert and R. Plymen, *Plancherel measure for* $\mathrm{GL}(n, F)$ *and* $\mathrm{GL}(m, D)$*: explicit formulas and Bernstein decomposition*, J. Number Theory **112** (2005), 26–66.

[Bo76] A. Borel, *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35** (1976), 233–259.

[Cl87] L. Clozel, *Characters of nonconnected, reductive p-adic groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 149–167.

[Cl90] ———, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), 255–302.

[Cl91] ———, *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group*, Harmonic analysis on reductive groups, Progr. Math. **101**, Birkhäuser Boston, 1991, pp. 101–121.

[DR] S. DeBacker and M. Reeder, *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*, preprint.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, 1984, pp. 33–117.

[Go94] D. Goldberg, *Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L-functions*, J. Reine Angew. Math. **448** (1994), 65–95.

[Gr97a] B. H. Gross, *On the motive of a reductive group*, Invent. Math. **130** (1997), 287–313.

[Gr97b] ———, *On the motive of* G *and the principal homomorphism* $\mathrm{SL}_2 \to \hat{G}$, Asian J. Math. **1** (1997), 208–213.

[Ha66] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters*, Acta Math. **116** (1966), 1–111.

[Ha99] ———, *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, University Lecture Series **16**, American Mathematical Society, 1999.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies **151**, Princeton University Press, 2001.

[He00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439–455.

[He03] ———, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, preprint.

[HS] K. Hiraga and H. Saito, *On L-packets of inner forms of* SL_n, preprint.

[HII] K. Hiraga, A. Ichino and T. Ikeda, *Formal degrees and adjoint* γ*-factors* preprint.

[II] A. Ichino and T. Ikeda, in preparation.

[Ko02] T. Konno, *Twisted endoscopy and the generic packet conjecture*, Israel J. Math. **129** (2002), 253–289.

[Ko84] R. E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.

[Ko86] ———, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.

[Ko88] ———, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. **127** (1988), 629–646.

[KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).

[La76] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Mathematics **544**, Springer-Verlag, 1976.

[Ma80] I. G. Macdonald, *The volume of a compact Lie group*, Invent. Math. **56** (1980), 93–95.

[Ra72] R. Ranga Rao, *Orbital integrals in reductive groups*, Ann. of Math. **96** (1972), 505–510.

[Re00] M. Reeder, *Formal degrees and L-packets of unipotent discrete series representations of exceptional p-adic groups*, J. Reine Angew. Math. **520** (2000), 37–93.

[Ro80] J. D. Rogawski, *An application of the building to orbital integrals*, Compositio Math. **42** (1980/81), 417–423.

[Ro90] ———, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies **123**, Princeton University Press, 1990.

[Sh90] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. **132** (1990), 273–330.

[Sh92] ———, *Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p-adic groups*, Duke Math. J. **66** (1992), 1–41.

[Sh00] ———, *Poles of intertwining operators via endoscopy: the connection with prehomogeneous vector spaces*, Compositio Math. **120** (2000), 291–325.

[SZ96] A. J. Silberger and E.-W. Zink, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p-adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1996.

[Wa03] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 235–333.

[Zi93] E.-W. Zink, *Comparison of* GL_N *and division algebra representations II*, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: hiraga@math.kyoto-u.ac.jp

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University, Osaka 558-8585, Japan
E-mail address: ichino@sci.osaka-cu.ac.jp

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: ikeda@math.kyoto-u.ac.jp